

Vysvětlení kvaternionu i jeho použití

Článek pojednává o významu a využití kvaternionů. Co jsou a k čemu se v praxi využívají kvaterniony - častý dotaz účastníků školení především nižší úrovně.

Stručně řečeno, kvaterniony představují natočení souřadného systému (Coordinate System - CS) např. v podobě TCP zvoleného nástroje, definovaného workobjektu či světa.

```
- Position _____  
Positions in coord: WorkObject  
X: -183.79 mm  
Y: -421.24 mm  
Z: 293.96 mm  
q1: 0.11768  
q2: 0.03707  
q3: 0.98470  
q4: 0.12309
```

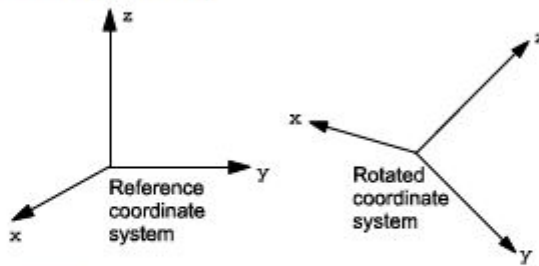
V náhledu je ukázán posuv a natočení CS nástroje vůči CS pracovního objektu.

Natočení lze také vyjádřit v Eulerových úhlech, jejich využití je mnohdy v praxi nenahraditelné a celkově jednodušší.

V obrázcích níže uvedených jsou kvaterniony odvozeny teoreticky i ukázané na konkrétních příkladech. Více je také zde online.

Co je kvaternion?

Orientace souřadného systému (např. nástroje) je popisována rotační maticí, která popisuje směr os souřadného systému ve vztahu k referenčnímu systému (viz následující obrázek).



xx0500002376

Otočené osy souřadného systému (x, y, z) jsou vektory, které mohou být vyjádřeny v referenčním souřadném systému takto:

$$x = (x_1, x_2, x_3)$$

$$y = (y_1, y_2, y_3)$$

$$z = (z_1, z_2, z_3)$$

To znamená, že x-komponent x-vektoru v referenčním souřadném systému bude x_1 , y-komponent bude x_2 a tak dále.

Tyto tři vektory mohou být sloučeny dohromady v matici (rotační matice), kde každý z vektorů tvoří jeden ze sloupců:

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}$$

xx0500002381

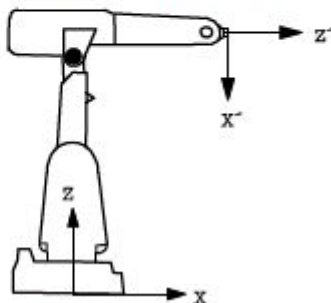
Kvaternion je jen výstižnější způsob, jak popsat tuto rotační matici; kvaterniony se vypočítávají na základě elementů rotační matice:

$q_1 = \frac{\sqrt{x_1+y_2+z_3+1}}{2}$	
$q_2 = \frac{\sqrt{x_1-y_2-z_3+1}}{2}$	sign $q_2 = \text{sign}(y_3-z_2)$
$q_3 = \frac{\sqrt{y_2-x_1-z_3+1}}{2}$	sign $q_3 = \text{sign}(z_1-x_3)$
$q_4 = \frac{\sqrt{z_3-x_1-y_2+1}}{2}$	sign $q_4 = \text{sign}(x_2-y_1)$

Příklad 1

Nástroj je orientován tak, že jeho osa Z' směřuje přímo dopředu (ve stejném směru jako osa X souřadného systému základny). Osa Y' nástroje odpovídá ose Y souřadného systému základny (viz následující obrázek). Jak je orientace nástroje definována v pozičních datech (`robtarget`)?

Orientace nástroje v naprogramované pozici je normálně vztažena k souřadnému systému použitého pracovního objektu. V tomto příkladu není použit žádný pracovní objekt a souřadný systém základny je totožný se světovým souřadným systémem. Tudíž, orientace je vztažena k souřadnému systému základny.



xx0500002377

Osy budou potom souviset takto:

$$x' = -z = (0, 0, -1)$$

$$y' = y = (0, 1, 0)$$

$$z' = x = (1, 0, 0)$$

Což odpovídá následující rotační matici:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

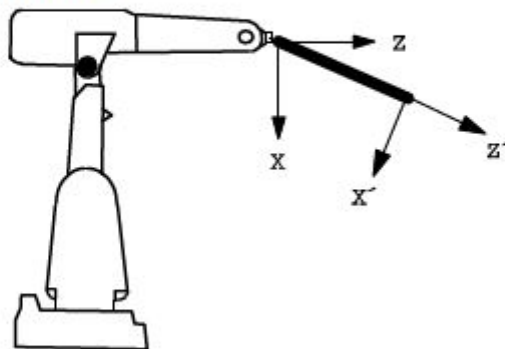
xx0500002388

Rotační matice poskytuje odpovídající kvaternion:

$q1 = \frac{\sqrt{0+1+0+1}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707$	
$q2 = \frac{\sqrt{0-1-0+1}}{2} = 0$	
$q3 = \frac{\sqrt{1-0-0+1}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707$	sign q3 = sign (1+1) = +
$q4 = \frac{\sqrt{0-0-1+1}}{2} = 0$	

Příklad 2

Směr nástroje je otočen o 30° ohledně os X' a Z' ve vztahu k souřadnému systému zápěstí (viz následující obrázek). Jak je orientace nástroje definována v datech nástroje?



xx0500002378

Osy budou potom souviset takto:

$$x' = (\cos 30^\circ, 0, -\sin 30^\circ)$$

$$y' = (0, 1, 0)$$

$$z' = (\sin 30^\circ, 0, \cos 30^\circ)$$

Což odpovídá následující rotační matici:

$$\begin{bmatrix} \cos 30^\circ & 0 & \sin 30^\circ \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin 30^\circ & 0 & \cos 30^\circ \end{bmatrix}$$

xx0500002398

Rotační matice poskytuje odpovídající kvaternion:

$q1 = \frac{\sqrt{\cos 30^\circ + 1 + \cos 30^\circ + 1}}{2} = 0.965926$	
$q2 = \frac{\sqrt{\cos 30^\circ - 1 - \cos 30^\circ + 1}}{2} = 0$	
$q3 = \frac{\sqrt{1 - \cos 30^\circ - \cos 30^\circ + 1}}{2} = 0.258819$	sign q3 = sign ($\sin 30^\circ + \sin 30^\circ$) = +
$q4 = \frac{\sqrt{\cos 30^\circ - \cos 30^\circ - 1 + 1}}{2} = 0$	